УДК 517.946

В. Н. Цымбал

О НЕКОТОРЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ

Построено асимптотическое разложение решения нелокальной по t сингулярно возмущенной задачи для параболического уравнения.

Идея использования асимптотики решения более простой сингулярно возмущенной задачи для построения асимптотики решения более сложной сингулярно возмущенной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений реализована в [3]. Представляется естественным применить этот подход к построению асимптотики решения задач для уравнений в частных производных. В настоящей работе эта идея применена к построению асимптотических разложений решений нелокальных по временной переменной задачи для параболических уравнений.

1. Постановка задач. В области $D = \{(x, t): 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассматривается нелокальная задача:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, t)\, u = f(x, t); \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \ u(l, t) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T); \tag{2}$$

$$u(x, 0) + \beta u(x, T) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Далее рассматриваются два случая: $\alpha = 0$ и $\alpha = 2$.

Построение и обоснование справедливости асимптотических разложений до произвольного порядка $N > 0$ будем вести при следующих условиях:

1) функции $a(x, t)$, $f(x, t)$ являются достаточно гладкими для справедливости приводимых ниже построений;

2) $a(x, t) > 0$ в D, $|\beta| \leqslant 1$.

Заметим, что однозначная разрешимость задач (1) — (3) при любом фиксированном значении параметра $\varepsilon > 0$ следует из [2].

2. *Построение формального асимптотического разложения.* Начнем со случая $\alpha = 0$. Прежде чем строить асимптотическое разложение решения задачи (1) — (3), построим асимптотическое разложение вспомогательной задачи, т. е. задачи решения уравнения (1) с граничными условиями (2) и начальным условием

$$u(x, 0, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i z_i(x), \tag{4}$$

вместо нелокального условия (3), где $z_i(x)$ $(i = \overline{0, N})$ — заданные достаточно гладкие, функции, такие, что $z_i(0) = z_i(l) = 0$ $(i = \overline{1, N})$. Далее покажем, что можно выбрать $z_i(x)$ $(i = \overline{0, N})$ таким образом, что это асимптотическое разложение будет являться и асимптотическим разложением решения исходной задачи.

Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2), (4) строим в виде

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i(x, t) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x, \tau), \tag{5}$$

где первая сумма в (5) $v(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i(x, t)$ — регулярная часть асимптотики, функции $\Pi_i(x, \tau)$ $(i = 0, \ldots, N)$ — функции погранслоя.

Обычным образом получаем задачи для определения $v_i(x, t)$ $(i = \overline{0, N})$ (4):

$$-\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + a(x, t) v_i = f_i(x, t); \tag{6}$$

$$v_i(0, t) = 0, \quad v_i(l, t) = 0, \tag{7}$$

где $f_0(x, t) \equiv f(x, t)$, $f_i(x, t) = -\frac{\partial v_{i-1}}{\partial t}$ $(i = 1, \ldots, N)$.

Функции погранслоя $\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x, \tau)$ служат для того, чтобы совместно с регулярной частью асимптотики удовлетворить начальному условию (4). Они определяются с помощью уравнения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + a(x, 0)\Pi = [a(x, 0) - a(x, \varepsilon\tau)]\Pi,$$

нулевых граничных условий и начального условия

$$\Pi(x, 0, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i z_i(x) - v(x, 0, \varepsilon).$$

Отсюда для $\Pi_i(x, \tau)$ $(i = 0, \ldots, N)$ получаем задачи

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x^2} + a(x, 0)\Pi_i = \varphi_i(x, \tau); \tag{8}$$

$$\Pi_i(0, \tau) = 0, \ \Pi_i(l, \tau) = 0; \tag{9}$$

$$\Pi_i(x, 0) = z_i(x) - v_i(x, 0), \tag{10}$$

где $\varphi_0(x, \tau) \equiv 0$, $\varphi_i(x, \tau)$ $(i = \overline{1, N})$ зависят от $\Pi_j(x, \tau)$ $(j < i)$ и легко выписываются явно.

Функции $v_i(x, t)$ $(i = \overline{0, N})$ являются решениями граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (t входит как параметр) (6), (7). Как видно, они определяются независимо от функций $\Pi_i(x, \tau)$ $(i = 0, \ldots, N)$, а однозначная разрешимость этих задач следует из [7].

Определив все функции $v_i(x, t)$ $(i = 0, \ldots, N)$, видим, что $\Pi_i(x, \tau)$ $(i = 0, \ldots, N)$ определяются рекуррентно, более того, из результатов [6] легко следует экспоненциальное убывание этих функций при $\tau \to \infty$, что доказывает их погранслойный характер. Таким образом, формальное асимптотическое разложение решения вспомогательной задачи (1), (2), (4) построено.

Подстановка асимптотического разложения (5) решения задачи (1), (2), (4) в условие (3) дает соотношения для определения $z_i(x)$ $(i = \overline{0, N})$, а именно

$$z_i(x) = -\beta v_i(x, T) \quad (i = 0, \ldots, N). \tag{11}$$

Подставляя полученные выражения (11) в (10), имеем начальные условия для определения функций $\Pi_i(x, \tau)$ $(i = \overline{0, N})$ — функций погранслоя асимптотического разложения решения исходной задачи (1) — (3). Решая задачи (8) — (10) с уже определенными начальными условиями, получаем функции погранслоя $\Pi_i(x, \tau)$ $(i = \overline{0, N})$. Совместно с определенными выше функциями $v_i(x, t)$ $(i = \overline{0, N})$ это дает все функции, входящие в асимптотическое разложение (5) задачи (1) — (3).

Переходим к построению асимптотического разложения решения задачи (1) — (3) в случае $\alpha = 2$. Как и ранее, сначала строим асимптотическое разложение рашения вспомогательной задачи (1), (2) с начальным условием

$$u(x, 0, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i z_i(x) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i p_i(\xi) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i q_i(\eta), \tag{12}$$

где все входящие в (12) функции достаточно гладкие; функции $p_i(\xi)$ $(i = 0, \ldots, N)$ — экспоненциально убывающие при $\xi \to \infty$ $(\xi = x/\varepsilon)$; функции $q_i(\eta)$ $(i = 0, \ldots, N)$ — экспоненциально убывающие при $\eta \to \infty$, $\eta = \dfrac{l-x}{\varepsilon}$, такие, что $z_i(0) + p_i(0) = 0$, $z_i(l) + q_i(0) = 0$ $(i = 0, \ldots, N)$.

Заметим, что асимптотика решения подобной задачи, правда, с обычным начальным условием, не зависящим от ε, ξ, η, получена в [1].

Асимптотическое разложение решения этой задачи строим в виде

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i(x, t) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x, \tau) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i Q_i^1(\xi, t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i Q_i^2(\eta, t) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i P_i^1(\xi, \tau) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i P_i^2(\eta, \tau), \tag{13}$$

где, как и ранее, $\tau = t/\varepsilon$; $v_i(x, t)$ — функции регулярной части асимптотики; $\Pi_i(x, \tau)$, $Q_i^1(\xi, t)$, $Q_i^2(\eta, t)$ — обыкновенные погранфункции, играющие роль в окрестности сторон $t = 0$, $x = 0$, $x = l$; $P_i^1(\xi, \tau)$, $P_i^2(\eta, \tau)$ — угловые погранфункции, играющие роль в окрестности вершин $(0, 0)$ и $(l, 0)$.

Принимая во внимание сделанное выше замечание, ограничимся выписыванием задач для определения входящих в (13) функций.

Для определения регулярной части асимптотики получаем уравнения

$$a(x, t) v_i = f_i(x, t) \quad (i = 0, \ldots, N), \tag{14}$$

где $f_0(x, t) \equiv f(x, t)$, $f_i(x, t) = -\dfrac{\partial v_{i-1}}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 v_{i-2}}{\partial x^2}$ $(i = \overline{1, N})$, здесь условимся считать функцию с отрицательным индексом тождественно равной нулю.

Функции погранслоя в окрестности $t = 0$ $\Pi_i(x, \tau)$ $(i = 0, \ldots, N)$ определяются как решения следующих задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (x играет роль параметра):

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} + a(x, 0) \Pi_i = g_i(x, \tau); \tag{15}$$

$$\Pi_i(x, 0) = z_i(x) - v_i(x, 0), \tag{16}$$

где $g_0(x, \tau) \equiv 0$, $g_i(x, \tau)$ $(i = 1, \ldots, N)$ выражаются определенным образом через $\Pi_j(x, \tau)$ $(j < i)$.

Функции погранслоя в окрестности $x = 0$ $Q_i^1(\xi, t)$ $(i = 0, \ldots, N)$ определяются как решения следующих задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (t играет роль параметра):

$$-\frac{\partial^2 Q_i^1}{\partial \xi^2} + a(0, t) Q_i^1 = h_i(\xi, t); \tag{17}$$

$$Q_i^1(0, t) = -v_i(0, t), \quad Q_i(\xi, t) \xrightarrow[\xi \to \infty]{} 0. \tag{18}$$

Функции погранслоя в окрестности границы $x = l$ $Q_i^2(\eta, t)$ $(i = 0, \ldots, N)$ определяются из задач, аналогичных (17), (18).

Функции углового погранслоя в окрестности точки $(0, 0)$ $P_i^1(\zeta, \tau)$ $(i = \overline{0, N})$ определяются как решения задач

$$\frac{\partial P_i^1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_i^1}{\partial \xi^2} + a(0, 0) P_i^1 = \varphi_i(\xi, \tau); \tag{19}$$

$$P_i^1(0, \tau) = -\Pi_i(0, \tau), \; P_i^1(\xi, 0) = p_i(\xi) - Q_i^1(\xi, 0), \; P_i^1(\xi, \tau) \xrightarrow[\sqrt{\xi^2+\tau^2}\to\infty]{} 0, \tag{20}$$

где $\varphi_0(\xi, \tau) \equiv 0$, $\varphi_i(\xi, \tau)$ $(i = 1, \ldots, N)$ выражаются через $P_j^1(\xi, \tau)$ $(j < i)$.

Функции углового погранслоя в окрестности точки $(l, 0)$ $P_i^2(\eta, \tau)$ $(i = 0, \ldots, N)$ определяются из задач, аналогичных (19), (20).

Как видим из приведенного выше, все функции, входящие в (13), определяются рекуррентно. Так же, как в [1], легко показывается, что $\Pi(x, \tau)$, $Q^1(\xi, t)$, $Q^2(\eta, t)$ — функции обыкновенного погранслоя, $P^1(\xi, \tau)$, $P^2(\eta, \tau)$ — функции углового погранслоя.

Таким образом, формальное асимптотическое разложение решения вспомогательной задачи (1), (2), (12) построено.

Далее подставляем асимптотическое разложение решения этой задачи в условие (3). Это дает

$$z_i(x) = -\beta v_i(x, T), \quad p_i(\xi) = -\beta Q_i^1(\xi, T),$$
$$q_i(\eta) = -\beta Q_i^2(\eta, T) \quad (i = \overline{0, N}). \tag{21}$$

Итак, имеем асимптотическое разложение решения исходной задачи в виде (13), которое совпадает с асимптотическим разложением вспомогательной задачи (1), (2), (12), где входящие в (12) функции определяются по формулам (21).

3. *Оценка остаточного члена.* Для остаточных членов $R_N(x, t, \varepsilon)$ разложений обычным образом получаем граничные задачи вида (1) — (3) с явно выписываемой правой частью уравнения (1), неоднородным условием (3), однородными условиями (2) для задачи при $\alpha = 0$ и неоднородными условиями (2) для задачи при $\alpha = 2$. Применение метода интегралов энергии [5, 2] дает следующую оценку:

$$\| R_N(x, t, \varepsilon) \|_{L_2(D)} \leqslant C\varepsilon^{N+1},$$

где константа C не зависит от ε. Здесь существенно используется второе условие (2).

4. *Замечания.* Результаты работы доложены на конференции [8]. Результаты работы справедливы и при других граничных условиях. Возможно распространение результатов на n-мерный случай. Метод работы позволил получить асимптотические разложения решений нелокальных задач для уравнений в частных производных разных типов.

1. *Бутузов В. Ф., Нестеров А. В.* Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. математика и кибернетика.— 1978.— № 2.— С. 49—56.
2. *Вабищевич П. Н.* Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности // Дифференц. уравнения.— 1981.— 17, № 7.— С. 1193—1199.
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 272 с.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.— 1957.— 12, № 5.— С. 3—122.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1964.— 830 с.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М. : Мир, 1968.— 427 с.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.
8. *Цымбал В. Н.* Некоторые неклассические сингулярно возмущенные задачи // Методы малого параметра и их применение.— Минск, 1982.— С. 118.

Львов. ун-т Получено 10.10.90